МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. С. Марченков

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Москва, 2012

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова

Р е ц е н з е н т ы :
В.Б.Алексеев — д.ф.-м.н., профессор
С.Н.Селезнева — к.ф.-м.н., доцент

Марченков С.С.

Функциональные системы: Учебное пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001); МАКС Пресс, 2012. — 47 с.

Пособие написано по программе обязательного курса „Функциональные системы“, который читается автором на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ для студентов кафедры математической кибернетики. Пособие состоит их двух глав. В главе 1 приведены необходимые начальные сведения по булевым функциям и дано современное доказательство теоремы Поста (перечисление всех замкнутых классов булевых функций с указанием конечных базисов). Глава 1 содержит также критерий функциональной полноты для частичных булевых функций. В главе 2 на языке предикатов дано описание всех предполных классов многозначной логики.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся по дискретной математике и кибернетике.

Содержание

Предисловие

На протяжении ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ автор читает для студентов 4-го курса кафедры математической кибернетики обязательный курс „Функциональные системы“. Материал курса разбросан по журнальным статьям и монографиям. В связи с этим возникла необходимость в компактном и доступном изложении результатов, составляющих курс.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой курса „Функциональные системы“. В нём представлены две основные темы: перечисление всех замкнутых классов булевых функций с доказательством полноты представленного списка классов (глава 1) и описание всех предполных классов многозначной логики (глава 2). Кроме того, в главу 1 включён параграф, в котором рассмотрены два вопроса о замкнутых классах частичных булевых функций, а в главу 2 — параграф, содержащий первоначальные сведения об однородных функциях — важных для приложений функциях многозначной логики.

Глава 1 содержит необходимые понятия, относящиеся к булевым функциям, а также небольшой перечень утверждений из курса „Дискретная математика“, используемых в дальнейшем изложении. В центральной части главы 1 даётся современное и короткое доказательство знаменитого результата Поста — описание всех замкнутых классов булевых функций и построение в них конечных базисов. В главе 2 на языке предикатов приводится определение всех предполных классов многозначной логики.

Пособие адресовано прежде всего студентам и аспирантам кафедры математической кибернетики. Оно может быть также полезно студентам, аспирантам и сотрудникам других кафедр, желающим подробно ознакомиться с классическими результатами Поста по замкнутым классам булевых функций.

Автор признателен профессору В.Б.Алексееву и доценту С.Н.Селезневой за полезные замечания и Д.В.Чистикову за помощь в оформлении рисунка.

Глава 1. Замкнутые классы булевых функций

Из курса дискретной математики известно, что помимо класса P_2 всех булевых функций и пяти его предполных классов L, M, S, T_0, T_1 существует и ряд других замкнутых классов булевых функций. Все замкнутые классы булевых функций были найдены Э.Постом (E.Post) в 1921 г. (подробное изложение результатов появилось в 1941 г.). В дальнейшем результаты Поста неоднократно переизлагались различными авторами, а идеи доказательств и сами доказательства значительно изменялись и упрощались. В этой главе приведены доказательства результатов Поста, которые в основном взяты из статьи [7]. В параграфах 1,2 содержатся ключевые понятия и предварительные результаты, которые излагаются в курсе „Дискретная математика“. Параграфы 3-6 посвящены собственно доказательствам результатов Поста. Параграф 7 тематически примыкает к основному содержанию главы 1. Стоит также отметить, что частичные булевы функции нередко встречаются в задачах и упражнениях по булевым функциям, а также при моделировании некоторых явлений в теории управляющих систем.

§ 1. Основные понятия

Булевы функции. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Для любого натурального числа n будем рассматривать n-ю декартову степень E_2^n множества E_2, которая состоит из 2^n упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in E_2$ при $1 \le i \le n$.

Булевой функцией (от) n переменных называется функция, отображающая множество E_2^n в множество E_2. Булеву функцию от n переменных называют также *n-местной булевой функцией.* Нетрудно видеть, что множество всех n-местных булевых функций конечно и состоит в точности из 2^{2^n} функций. Совокупность всех булевых функций (от любого числа переменных) принято обозначать P_2.

Элементарные булевы функции. Следующие функции от одной и двух переменных играют основную роль на протяжении всего дальнейшего изложения: 0 (константа нуль), 1 (константа единица), x (тождественная функция), $\bar{x}$ (отрицание), $x \vee y$ (дизъюнкция), xy (конъюнкция или умножение), $x + y$ (сложение по модулю 2), $x \to y$ (импликация). Определение этих функций приведено ниже в таблицах.

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x	y	$x \vee y$	xy	$x + y$	$x \to y$
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1

В дальнейшем, говоря о функции f от n переменных (n-местной функции f), мы будем, как правило, использовать обозначение $f(x_1, \ldots, x_n)$, имея в виду, что n переменных функции f упорядочены и первая переменная обозначена через x_1, вторая — через x_2 и т.д. Вместе с тем, как это часто практикуется, при небольшом числе переменных у функции f её первые две-четыре переменные принято обозначать x, y, z, w. Мы этим соглашением также будем пользоваться.

Существенные и фиктивные переменные. В отличие от функций более сложной природы для булевых функций одним из важнейших понятий является понятие существенной зависимости от переменной. Переменная x_i называется *существенной переменной* для функции $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, если найдутся такие значения $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Иными словами, переменная x_i является существенной для функции f, если при некоторых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ из E_2 одноместная функция $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ отлична от константы. Переменная, которая не является существенной для функции f, называется *несущественной* или *фиктивной переменной* для f.

Формулы и реализация функций формулами. Пусть Q — непустое множество булевых функций. По индукции определим понятие формулы над Q. Одновременно всякой формуле над Q будет сопоставлена булева функция, реализуемая этой формулой.

Пусть символом f обозначена n-местная функция из Q, а $x_1, \ldots, x_n$ — символы переменных. Тогда выражение $f(x_1, \ldots, x_n)$ есть *формула над* Q. Формуле $f(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставим ту функцию из Q от n переменных, которая обозначена символом f.

Пусть символом g обозначена m-местная функция из Q, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — либо формулы над Q, либо символы переменных (не обязательно различные). Тогда выражение $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ есть *формула над* Q. Предположим, что выражениям Φ_i, отличным от символов переменных (т.е. представляющим формулы над Q) уже сопоставлены реализуемые ими функции f_i. Выражениям Φ_j, которые представляют собой символы переменных $x_{p(j)}$, сопоставим функции $f_j(x_{p(j)})$, значения которых совпадают со значениями переменных $x_{p(j)}$. Тогда формуле $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ сопоставляем функцию $g(f_1, \ldots \ldots, f_m)$, реализуемую этой формулой.

Если функция f реализуется формулой, которая составлена только из символов функций $f_1, \ldots, f_s$ (а также символов переменных), то говорим, что функция f является *суперпозицией* функций $f_1, \ldots, f_s$ или что f получена суперпозицией функций $f_1, \ldots, f_s$.

Отметим один частный случай суперпозиции. Пусть f — n-местная функция и $1 \leq i < j \leq n$. О функции $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ говорим, что она получена из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ *отождествлением* (или в результате *отождествления*) переменных x_i, x_j. Термин „отождествление переменных“ используем и в более сложных случаях, когда операция отождествления двух переменных применяется многократно.

Замыкание и замкнутые классы. Пусть Q — множество булевых функций. *Замыканием множества* Q (относительно операции суперпозиции) называется множество всех функций, которые можно реализовать формулами над Q. Иными словами, замыкание Q состоит из всех функций, которые являются суперпозициями функций из Q. Замыкание множества Q будем обозначать $[Q]$. Множество Q булевых функций называется (*функционально*) *замкнутым*, если $Q = [Q]$. Замкнутые множества булевых функций принято называть также *замкнутыми классами* или *классами Поста*. Из определения нетрудно вывести, что пересечение двух замкнутых классов есть замкнутый класс.

Оператор замыкания [ ] обладает следующими легко проверяемыми свойствами (Q_1, Q_2 — произвольные множества булевых функций).

1. $Q_1 \subseteq [Q_1]$.
2. Если $Q_1 \subseteq Q_2$, то $[Q_1] \subseteq [Q_2]$.
3. $[[Q_1]] = [Q_1]$.

Отметим, что свойства (аксиомы) 1–3 часто кладут в основу аксиоматического определения оператора замыкания.

Порождающие множества и базисы. Будем говорить, что множество функций Q *порождает* замкнутый класс R (или класс R *порождается* множеством функций Q), если $[Q] = R$. Если множество Q порождает замкнутый класс R, то говорят также, что множество Q *полно* в классе R. При $[Q] = P_2$ множество Q называется *полным* множеством. Если замкнутый класс порождается конечным множеством, то он называется *конечно порождённым*. Множество функций Q называется *базисом* замкнутого класса R, если $[Q] = R$ и $[Q_1] \neq R$ для любого подмножества Q_1 множества Q, отличного от Q.

Следующее очевидное утверждение неоднократно используется в дальнейшем.

Утверждение. *Пусть множество Q_1 полно в замкнутом классе R, $Q_2 \subseteq R$ и функции множества Q_1 реализуются формулами над Q_2. Тогда множество Q_2 также полно в R.*

§ 2. Предварительные сведения

Теорема П1 (о разложении булевой функции по переменной). *Для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $i, 1 \leq i \leq n$, имеет место представление*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee$$
$$\vee \bar{x}_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Отметим, что функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ носит название *x_i-компоненты* функции f, а функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — *$\bar{x}_i$-компоненты* функции f.

Введём следующее обозначение: если $\sigma \in E_2$, то пусть $x^\sigma = x$ при $\sigma = 1$ и $x^\sigma = \bar{x}$ при $\sigma = 0$.

Следствие 1 (о разложении булевой функции по k переменным). *Для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $k, 1 \leq k \leq n$, имеет место представление*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Следствие 2. *Система функций $\{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ полна в классе P_2.*

Опираясь на полноту системы $\{\bar{x}, x \vee y, xy\}$, нетрудно также показать полноту каждой из систем

$$\{\bar{x}, x \vee y\}, \quad \{\bar{x}, xy\}, \quad \{1, x + y, xy\}, \quad \{\bar{x}, x \to y\}.$$

Отметим один частный случай следствия 1. Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ отлична от константы 0 и $k = n$. Тогда имеет место представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

правая часть которого носит название *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* (коротко: совершенная ДНФ или СДНФ) функции f.

Функция $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается $f^*(x_1, \ldots, x_n)$. Если $f^* = f$, то функция f называется *самодвойственной*. Множество всех самодвойственных функций обозначим через S.

Поскольку $\bar{\bar{x}} = x$, для любой булевой функции f имеет место равенство $f^{**} = f$. Двойственными друг другу являются константы 0 и 1, функции $x \vee y$ и xy. Двойственной к функции $x + y$ будет функция $x + y + 1$, а к функции $x \to y$ — функция $\bar{x}y$. Функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{x}$, $x + y + z$ и $xy \vee xz \vee yz$ самодвойственны.

Если $Q \subseteq P_2$, то то через Q^* обозначаем множество всех функций, двойственных к функциям из Q. Отметим следующий очевидный факт: если $Q_1 \subseteq Q_2$, то $Q_1^* \subseteq Q_2^*$.

Теорема П2. *Если*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

то

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)).$$

Следствие 1 (принцип двойственности). *Пусть функция f реализуется формулой Φ, составленной из функций $g_1, \ldots, g_r$. Тогда двойственная функция f^* реализуется формулой Φ^*, которая получается из формулы Φ заменой каждого вхождения функции g_i $(1 \leq i \leq r)$ соответствующей двойственной функцией g_i^*.*

Следствие 2. *Если Q — замкнутый класс, то Q^* — также замкнутый класс.*

Следствие 3. *Множество S образует замкнутый класс.*

Следствие 4. *Если множество Q порождает замкнутый класс R, то множество Q^* порождает замкнутый класс R^*. В частности, если Q — базис класса R, то Q^* — базис класса R^*.*

Лемма П1 (о несамодвойственной функции). *Из несамодвойственной функции путём подстановки вместо всех переменных функций x, $\bar{x}$ можно получить константу.*

Для любого $n \geq 1$ определим на множестве E_2^n частичный порядок, который будем обозначать символом $\leq$. Пусть $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — наборы из E_2^n. Говорим, что набор $\tilde{a}$ *не превосходит* набора

$\tilde{b}$ (пишем $\tilde{a} \leq \tilde{b}$), если для любого $i, 1 \leq i \leq n$, выполняется неравенство $a_i \leq b_i$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если она монотонна относительно этого частичного порядка, т.е. если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_2^n$ из неравенства $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ следует неравенство $f(\tilde{a}) \leq f(\tilde{b})$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций. Множеству M принадлежат, например, функции $0, 1, x \vee y, xy, e_i^n$ и не принадлежат функции $\bar{x}, x + y, x \to y$. Отметим, что M — замкнутый класс.

Теорема П1 для монотонной функции допускает следующее усиление.

Теорема П3. *Для любой монотонной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $i, 1 \leq i \leq n$, имеет место представление*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee$$
$$\vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

В самом деле, для монотонной функции f и любых значений $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Поэтому конъюнктивный сомножитель $\bar{x}_i$ из представления теоремы П1 можно опустить.

Следствие. *Имеем $M = [0, 1, x \vee y, xy]$. Если f — монотонная функция, отличная от константы, то $f \in [x \vee y, xy]$.*

В следствии 2 из теоремы П1, отмечено, что система $\{1, x + y, xy\}$ является полной. Функции $x + y$ и xy представляют собой сложение и умножение в поле Галуа $GF(2)$. Поэтому всякую формулу над множеством $\{1, x + y, xy\}$ можно привести к эквивалентной полиномиальной форме

$$a + \sum_{i_1, \ldots, i_s} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

(где $a, a_{i_1}, \ldots, a_{i_s} \in E_2$), которая называется *полиномом над полем Галуа $GF(2)$* или *полиномом Жегалкина*. Для любой булевой функции полином Жегалкина единственен с точностью до перестановки слагаемых в сумме и сомножителей в произведениях.

Булева функция называется *линейной*, если её полином Жегалкина линеен (т.е. имеет степень не выше 1). Другими словами, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является линейной, если она представима в виде

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in E_2$. Отметим, что в данном представлении выписаны все переменные функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Однако, если, например, $a_i = 0$, то переменная x_i для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ является фиктивной и слагаемое $a_i x_i$ в её представлении можно опустиить.

Обозначим через L множество всех линейных функций. Непосредственно из определения следует, что множество L образует замкнутый класс. Классу L принадлежат функции $0, 1, x, \bar{x} = x + 1, x + y$ и не принадлежат, например, функции xy и $x \vee y = xy + x + y$. Легко убедиться в том, что класс L порождается функциями $1, x + y$.

Лемма П3 (о нелинейной функции). *Из нелинейной функции путём подстановки вместо всех переменных функций* 0,x,y *можно получить нелинейную функцию от переменных* x,y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$. Тогда в полиноме Жегалкина функции f есть нелинейное слагаемое. Выберем нелинейное слагаемое наименьшей степени. Пусть, например, оно имеет вид $x_1 \dots x_k$, где $k \geq 2$. Заменим в функции $f(x_1, \dots, x_n)$ переменную x_1 переменной x, переменные $x_2, \dots, x_k$ — переменной y, а все остальные переменные — константой 0. Полученную функцию обозначим $g(x, y)$. В силу минимальности степени слагаемого $x_1 \dots x_k$ полином Жегалкина функции $g(x, y)$ примет вид $xy + ax + by + c$, где $a, b, c \in E_2$. Таким образом, $g \notin L$, и лемма доказана.

Обозначим через T_0 множество всех функций f, *сохраняющих константу* 0, т.е. удовлетворяющих равенству $f(0, \dots, 0) = 0$. Множество T_0 образует замкнутый класс. Аналогично определяется класс T_1. Классу T_0 принадлежат функции $0, x, x \vee y, xy, x + y$ и не принадлежат функции $1, \bar{x}, x \to y$. Нетрудно заметить, что классы T_0, T_1 двойственны друг другу: $T_0 = T_1^*$, $T_1 = T_0^*$.

Рассмотрим полином Жегалкина произвольной функции класса T_0. Тогда слагаемое a в нём необходимо равно нулю. Вместе с тем суперпозициями функции xy можно реализовать любую функцию вида $x_{i_1} \dots x_{i_s}$, а с использованием дополнтельно функции $(x + y)$ — и сумму таких функций. Следовательно, формулами над множеством $\{x + y, xy\}$ можно реализовать любой полином Жегалкина, если только $a = 0$ (напомним, что $0 = x + x$). Таким образом, приходим к равенству

$$T_0 = [x + y, xy].$$

В дальнейшем нам понадобится соотношение

$$T_0 = [x \vee y, x\bar{y}].$$

Оно вытекает из сформулированного выше утверждения и тождеств

$$x + y = x\bar{y} \vee \bar{x}y, \quad xy = \overline{\bar{x}\bar{y}}y.$$

В силу принципа двойственности будем иметь

$$T_1 = [x \vee y, x + y + 1] = [x \vee \bar{y}, xy].$$

Отметим, что ни один из замкнутых классов

$$S, \quad M, \quad L, \quad T_0, \quad T_1$$

целиком не содержится в другом.

Теорема П4 (критерий полноты в классе P_2). *Система булевых функций полна в классе P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов S, M, L, T_0, T_1.*

Следствие 1. *Всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от класса P_2, целиком содержится хотя бы в одном из замкнутых классов S, M, L, T_0, T_1.*

Замкнутый класс Q называется *предполным*, если $Q \neq P_2$ и для любой функции $f \notin Q$ система $Q \cup \{f\}$ полна в P_2.

Следствие 2. *В классе P_2 существует только пять предполных классов*: S, M, L, T_0, T_1.

§ 3. Замкнутые классы, лежащие в классах U, D, K, L

Пусть U — множество всех булевых функций, которые существенно зависят не более чем от одной переменной, C — множество всех функций, которые не имеют существенных переменных (константы). Легко видеть, что U и C суть замкнутые классы. Положим

$$U_0 = U \cap T_0, \quad U_1 = U \cap T_1, \quad MU = M \cap U, \quad SU = S \cap U,$$

$$U_{01} = U \cap T_0 \cap T_1, \quad C_0 = C \cap T_0, \quad C_1 = C \cap T_1.$$

Следующая теорема легко доказывается рассмотрением всех функций от одной переменной (напомним, что все функции рассматриваются с точностью до несущественных переменных).

Теорема 1. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе U, совпадает с одним из следующих классов* (*в квадратных скобках указаны базисы классов*):

$$U = [0, \bar{x}],\ U_0 = [0, x],\ U_1 = [1, x],\ MU = [0, 1, x],\ SU = [\bar{x}],$$

$$U_{01} = [x], \quad C = [0, 1], \quad C_0 = [0], \quad C_1 = [1].$$

Обозначим через D множество всех дизъюнкций, т.е. множество всех функций f, которые представимы в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \vee a_1 x_1 \vee \dots \vee a_n x_n, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ и $n \geq 1$. Двойственным образом определяется множество K всех конъюнкций. Отметим, что каждое из множеств D, K содержит обе константы. Легко видеть, что множества D, K являются замкнутыми классами.

Положим

$$D_0 = D \cap T_0, \quad D_1 = D \cap T_1, \quad D_{01} = D \cap T_0 \cap T_1,$$

$$K_0 = K \cap T_0, \quad K_1 = K \cap T_1, \quad K_{01} = K \cap T_0 \cap T_1.$$

Теорема 2. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в одном из классов D,K и не содержащийся в классе U, совпадает с одним из следующих классов*:

$$D = [0, 1, x \vee y],\ D_0 = [0, x \vee y],\ D_1 = [1, x \vee y],\ D_{01} = [x \vee y],$$

$$K = [0, 1, xy], \quad K_0 = [0, xy], \quad K_1 = [1, xy], \quad K_{01} = [xy].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq D$ и $F \nsubseteq U$. Тогда в класс F входит такая функция $f(x_1, \dots, x_n)$, в представлении (1) которой $a_0 = 0$ и хотя бы два из коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ отличны от 0. Пусть, например, это будут коэффициенты a_1, a_2. В этом случае, очевидно, функция $f(x_1, x_2, \dots, x_2)$ равна функции $x_1 \vee x_2$. Далее рассматриваем четыре возможных случая вхождения констант 0,1 в класс F и пользуемся соотношениями $0 \vee x = x,\ 1 \vee x = 1$. Аналогичные рассуждения проводим для класса K. Теорема доказана.

Положим

$$L_0 = L \cap T_0, \quad L_1 = L \cap T_1, \quad SL = S \cap L, \quad L_{01} = L \cap T_0 \cap T_1.$$

Теорема 3. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе L и не содержащийся в классе U, совпадает с одним из следующих классов*:

$$L = [1, x + y], \quad L_0 = [x + y], \quad L_1 = [x + y + 1],$$
$$SL = [x + y + z + 1], \quad L_{01} = [x + y + z].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq L$ и $F \nsubseteq U$. Тогда классу F принадлежит функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных. Используя соотношение $x + x = 0$, отождествлением переменных получаем из этой функции одну из функций

$$a + x + y, \quad a + x + y + z,$$

где $a \in \{0, 1\}$.

Предположим, что класс F содержит обе функции вида $a+x+y$. Тогда $F = L$, поскольку класс L порождается системой функций $\{1, x + y\}$ и $1 = 1 + x + x$.

Пусть в класс F входит только одна функция вида $a+x+y$, например $x+y$. Тогда класс F, очевидно, содержит константу 0, а функции 0, $x+y$ позволяют определить в классе F все линейные функции, сохраняющие 0. Вместе с тем класс F не содержит функций, не сохраняющих 0: иначе подстановкой константы 0 в такую функцию мы получили бы константу 1 и, следовательно, пришли к функции $1 + x + y$. Таким образом, в этом случае класс F совпадает с классом L_0.

Двойственным образом рассматривается случай функции $1 + x + y$, который приводит к классу L_1.

Предположим, что класс F не содержит функций вида $a+x+y$. Тогда каждая функция из F существенно зависит от нечётного числа переменных. Исходя из определения самодвойственной функции, нетрудно убедиться в том, что в этом случае все функции класса F самодвойственны.

Если в класс F входит функция $1 + x + y + z$, то в него входят также функции $1 + x$ и $x + y + z$:

$$1 + x = 1 + x + x + x, \quad x + y + z = 1 + (1 + x + y + z).$$

Далее замечаем, что с помощью функции $x + y + z$ к произвольной линейной функции можно „добавить“ две новые существенные переменные. Следовательно, функция $1 + x + y + z$ порождает множество всех линейных функций с нечётным числом существенных переменных, т.е. класс SL самодвойственных линейных функций.

Предположим, наконец, что в класс F входит функция $x + y + z$, но не входит функция $1 + x + y + z$. Понятно, что в этом случае все функции класса F сохраняют константу 0. Так же, как и выше, убеждаемся, что функция $x + y + z$ порождает множество всех линейных функций, которые сохраняют 0 и имеют нечётное число существенных переменных. Остаётся заметить, что класс L_{01} состоит в точности из всех таких функций. Теорема доказана.

§ 4. Замкнутые классы, лежащие в классах S, O^∞, I^∞

Положим

$$m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz.$$

Функция $m(x, y, z)$ называется *медианой.* Она самодвойственна, монотонна и нелинейна.

Лемма 1. *Пусть $f \in S \setminus L$. Тогда отождествлением и перестановкой переменных из функции f можно получить одну из функций*

$$m(x, y, z), \quad m(x, y, \bar{z}), \quad m(x, \bar{y}, \bar{z}), \quad m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме о нелинейной функции подстановкой константы 0 и переменных y, z из функции f можно получить нелинейную функцию от переменных y, z. Если вместо константы 0 в функцию f всюду подставить переменную x, то получим самодвойственную нелинейную функцию $g(x, y, z)$. Все нелинейные функции $g(0, y, z)$ суть

$$yz,\ yz+1,\ yz+y,\ yz+y+1,\ yz+z,\ yz+z+1,\ yz+y+z,\ yz+y+z+1.$$

Восстанавливая по функции $g(0, y, z)$ соответствующую функцию $g(x, y, z)$, приходим к следующим функциям $g(x, y, z)$:

$$m(x, y, z), \quad m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad m(x, y, \bar{z}), \quad m(\bar{x}, \bar{y}, z), \quad m(x, \bar{y}, z),$$

$$m(\bar{x}, y, \bar{z}), \quad m(\bar{x}, y, z), \quad m(x, \bar{y}, \bar{z}).$$

Лемма доказана.

Положим

$$T_{01} = T_0 \cap T_1.$$

Покажем, что

$$T_{01} = [x + y + z, xy] = [x \vee y\bar{z}, xy].$$

Рассмотрим полином Жегалкина произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса T_{01}. Поскольку функция f сохраняет 0, свободный член её полинома равен нулю. Вместе с тем из соотношения $f \in T_1$ следует, что число слагаемых полинома нечётно. Таким образом, функция f может быть получена из функции вида $y_1 + \ldots + y_{2k+1}$ подстановкой вместо каждой переменной y_j некоторой конъюнкции $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, где $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, n\}$. Для доказательства равенства $T_{01} = [x + y + z, xy]$ остаётся заметить, что линейная функция $y_1 + \ldots + y_{2k+1}$ порождается функцией $x + y + z$, а конъюнкция $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ — функцией xy.

Справедливость второго из доказываемых равенств вытекает из следующих построений. Из функции $x \vee y\bar{z}$ получаем функцию $w \vee x\bar{y}\bar{z}$:

$$w \vee x\bar{y}\bar{z} = w \vee (w \vee x\bar{y})\bar{z}.$$

Из последней функции подстановками образуем функцию

$$w \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Далее с помощью функции xy получаем функцию xyz и, подставив её вместо переменной w в предыдущую функцию, приходим к совершенной ДНФ

$$xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$$

функции $x + y + z$.

Положим

$$S_{01} = S \cap T_{01}, \quad SM = S \cap M.$$

Напомним, что x_i-компонентой функции f мы назвали функцию, которая получается из функции f подстановкой константы 1 вместо переменной x_i, а $\bar{x}_i$-компонентой — аналогичной подстановкой константы 0.

Лемма 2. *Имеют место соотношения*

$$S = [m(x, \bar{y}, \bar{z})] = [m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})], \quad S_{01} = [m(x, y, \bar{z})], \quad SM = [m(x, y, z)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $m(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = m(x, \bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$, то ограничимся доказательством равенства $S = [m(x, \bar{y}, \bar{z})]$. Заметим, что $\bar{x}$-компонента функции $m(x, \bar{y}, \bar{z})$ есть $\bar{y}\bar{z}$ (стрелка Пирса), которая образует полную в P_2 систему. Следовательно, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из S, то суперпозициями функции $m(0, \bar{y}, \bar{z})$ можно получить $\bar{x}_1$-компоненту функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Заменяя в этих суперпозициях константу 0 всюду переменной x_1, мы в силу включения $f \in S$ получим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Для доказательства равенства $S_{01} = [m(x, y, \bar{z})]$ заметим, что $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компоненты функции $m(x, y, \bar{z})$ суть соответственно $y\bar{z}$ и $x \vee y$. Как показано в § 2, система $\{y\bar{z}, x \vee y\}$ порождает класс T_0. Следовательно, $\bar{x}_1$-компоненту произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса S_{01} можно получить суперпозициями $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компонент функции $m(x, y, \bar{z})$. Далее заменяем в этих суперпозициях константу 0 всюду переменной x_1 и приходим к функции f.

Покажем, что $SM = [m(x, y, z)]$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in SM$ и $n \geq 3$. Обозначим набор переменных $x_4, \ldots, x_n$ через $\tilde{x}$. Докажем, что имеет место тождество

$$f(x_1, x_2, x_3, \tilde{x}) = m(f(x_1, x_1, x_3, \tilde{x}), f(x_1, x_2, x_2, \tilde{x}), f(x_3, x_2, x_3, \tilde{x})).$$

Ввиду самодвойственности функции f его достаточно проверить лишь для наборов (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0). Для первого набора равенство очевидно. Взяв второй набор, для значений функции f в правой части равенства в силу монотонности функции f получим

$$f(0, 0, 0, \tilde{x}) \leq f(0, 0, 1, \tilde{x}) \leq f(1, 0, 1, \tilde{x}).$$

Поэтому медианой будет „выбрано“ значение $f(0, 0, 1, \tilde{x})$. Аналогичным образом, в случае третьего набора приходим к неравенствам

$$f(0, 0, 0, \tilde{x}) \leq f(0, 1, 0, \tilde{x}) \leq f(0, 1, 1, \tilde{x})$$

и выбору значения $f(0, 1, 0, \tilde{x})$. Наконец, для четвёртого набора получаем неравенства

$$f(0, 0, 0, \tilde{x}) \leq f(1, 0, 0, \tilde{x}) \leq f(1, 1, 0, \tilde{x}).$$

Для завершения доказательства леммы остаётся заметить, что в классе SM нет функций, существенно зависящих ровно от двух переменных.

Теорема 4. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе S и не содержащийся в классе L, совпадает с одним из классов S, S_{01}, SM.*

Доказательство. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq S$ и $F \not\subseteq L$. Включения $SM \subset S_{01} \subset S$ и леммы 1,2 показывают, что $SM \subseteq F$. Поэтому если $F \subseteq M$, то $F = SM$.

Предположим, что F содержит немонотонную функцию. Согласно лемме о немонотонной функции, подстановкой констант 0,1 и переменной z из неё можно получить немонотонную функцию $\bar{z}$. Если вместо констант 0,1 всюду подставить соответственно переменные x, y, то получим немонотонную (по переменной z) функцию $g(x, y, z)$ из класса S. Все такие функции $g(x, y, z)$ суть

$$m(x, y, \bar{z}),\ m(x, \bar{y}, \bar{z}),\ m(\bar{x}, y, \bar{z}),\ m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \bar{z},\ x + y + z + 1,\ x + y + z.$$

Во всех случаях в классе F легко определяется функция $m(x, y, \bar{z})$ (в последнем случае имеем

$$m(x, y, \bar{z}) = m(x, y, z) + x + y).$$

Значит, в силу леммы 2 получаем $S_{01} \subseteq F$. Если при этом $F \subseteq T_{01}$, то $F = S_{01}$. В противном случае в класс F входит функция, не сохраняющая 0. Отождествлением переменных из неё можно получить функцию $\bar{x}$. Остается заметить, что, согласно лемме 2, $[\bar{x}, m(x, y, z)] = S$. Теорема доказана.

Обозначим через O^∞ множество всех булевых функций, которые обладают следующим свойством: все наборы, на которых функция принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту. Двойственным образом (с заменой 0 на 1) определяется множество I^∞. Несложно проверить, что O^∞, I^∞ — замкнутые классы.

Из определения множества O^∞ следует, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству O^∞ в том и только том случае, когда для некоторого $i, 1 \leq i \leq n$, выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Двойственное соотношение имеет место для функций из класса I^∞.

Лемма 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in O^\infty \setminus D$. Тогда в зависимости от соотношения*

$$f \notin T_0, \quad f \in T_0 \setminus M \ \textit{или}\ f \in M \tag{3}$$

множество $[f]$ содержит функцию $x \vee \bar{y}$, $x \vee y\bar{z}$ или $x \vee yz$.

Доказательство. Пусть, например, для функции f справедливо представление (2), где $i = 1$. Положим

$$g(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Из $f \notin D$ следует, что $g \notin D$.

Пусть $g \notin M$. Согласно лемме о немонотонной функции из функции $g(x_2, \ldots, x_n)$ подстановкой вместо всех переменных констант 0,1 и переменной z можно получить функцию $\bar{z}$. Заменим в функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменной x переменную x_1 и все переменные x_i, вместо которых в функцию g подставлялась константа 0, переменной y — все переменные x_j, вместо которых в функцию g подставлялась контанта 1, и переменной z — все остальные переменные. Получим функцию $h(x, y, z)$ из класса O^∞ такую, что

$$h(x, y, z) = x \vee h(0, y, z), \quad h(0, 1, z) = \bar{z}.$$

Функция $h(0, y, z)$ может совпадать лишь с одной из функций

$$\bar{z}, \quad \bar{y} \vee \bar{z}, \quad y\bar{z}, \quad y\bar{z} \vee \bar{y}z.$$

Если $f \notin T_0$, то, очевидно, $h(0, y, z) \notin T_0$. Поэтому $h(0, y, z) \in \{\bar{z}, \bar{y} \vee \bar{z}\}$. В этих случаях получаем $h(x, y, y) = x \vee \bar{y}$. Если $f \in T_0$, то также $h(0, y, z) \in T_0$. Значит,

$$h(0, y, z) \in \{y\bar{z}, y\bar{z} \vee \bar{y}z\}.$$

При $h(0, y, z) = y\bar{z}$ имеем $h(x, y, z) = x \vee y\bar{z}$, а при $h(0, y, z) = y\bar{z} \vee \bar{y}z$ —

$$h(x, y, x) = x \vee y, \quad h(x, y \vee z, z) = x \vee y\bar{z}.$$

Пусть теперь $g \in M$. Так как $g \notin D$, то функция g, в частности, отлична от константы, т.е. $g \in M_{01}$. В силу следствия из теоремы П3 функцию g можно представить в виде $K_1 \vee \ldots \vee K_t$, где $K_1, \ldots, K_t$ — (различные) монотонные конъюнкции, хотя бы одна из которых отлична от переменной (поскольку $g \notin D$). Выберем из неодночленных конъюнкций конъюнкцию наименьшей длины. Пусть, например, она имеет вид $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, где $s \geq 2$. Если заменить в функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменной x_1 все переменные x_j, отличные от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, то, очевидно, получится функция $x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_s}$. Из неё дальнейшим отождествлением переменных поолучаем функцию $x_1 \vee x_{i_1} x_{i_2}$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin O^\infty$ и $f \neq 0$. Тогда в зависимости от соотношения* (3) *множество* $[x \vee y, f]$ *содержит функцию* $x \vee \bar{y}$, $x \vee y\bar{z}$ *или* $x \vee yz$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = f(x_1, \ldots, x_n) \vee y.$$

Очевидно, что $g \in [x \vee y, f]$ и $g \in O^\infty \setminus D$. Далее замечаем, что соотношения (3) влекут соответственно соотношения

$$g \notin T_0, \quad g \in T_0 \setminus M, \quad g \in M.$$

Остаётся применить лемму 3.

Положим

$$O_0^\infty = O^\infty \cap T_0, \quad MO^\infty = M \cap O^\infty, \quad MO_0^\infty = M \cap O_0^\infty,$$

$$I_1^\infty = I^\infty \cap T_1, \quad MI^\infty = M \cap I^\infty, \quad MI_1^\infty = M \cap I_1^\infty.$$

Лемма 4. *Имеют место соотношения*

$$O^\infty = [x \vee \bar{y}],\ O_0^\infty = [x \vee y\bar{z}],\ MO^\infty = [1, x \vee yz],\ MO_0^\infty = [x \vee yz],$$

$$I^\infty = [x\bar{y}],\ I_1^\infty = [x(y \vee \bar{z})],\ MI^\infty = [0, x(y \vee z)],\ MI_1^\infty = [x(y \vee z)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим классы типа O^∞. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in O^\infty$ и для функции f имеет место представление (2) при $i = 1$. Представим функцию f в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \vee K_1 \vee \ldots \vee K_t, \tag{4}$$

где $K_1, \ldots, K_t$ — конъюнкции от переменных $x_2, \ldots, x_n$ (не обязательно монотонные). Если $f \in MO_0^\infty$, то все конъюнкции $K_1, \ldots, K_t$ монотонны и отличны от констант. В этом случае функцию f можно получить из дизъюнкции $x_1 \vee y_1 \vee \ldots \vee y_t$ (которая легко реализуется суперпозициями функции $x \vee yz$) подстановкой вместо каждой переменной y_i функции $x_1 \vee K_i$. В свою очередь функцию вида $x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, где $s \geq 3$, можно получить с помощью функции $x \vee yz$, используя рекуррентное соотношение

$$x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_{s+1}} = x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_s} \cdot (x_1 \vee x_{i_s} x_{i_{s+1}}).$$

При рассмотрении класса MO^∞ следует заметить, что данный класс отличается от класса MO_0^∞ только наличием константы 1.

Перейдём к классу O_0^∞. Замечаем, что при $f \in O_0^\infty$ каждая конъюнкция K_i из представления (4) функции f обязана содержать хотя бы одну переменную без отрицания. В связи с этим функцию вида $x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_r} \bar{x}_{i_{r+1}} \ldots \bar{x}_{i_s}$, где $r \geq 1$, получаем из функции $x_1 \vee x_{i_1} \ldots x_{i_r} z_{r+1} \ldots \ldots z_s$ подстановкой вместо переменных $z_{r+1}, \ldots, z_s$ соответственно функций $x_1 \vee x_{i_r} \bar{x}_{i_{r+1}}, \ldots, x_1 \vee x_{i_r} \bar{x}_{i_s}$.

Наконец, в случае $f \in O^\infty$ среди конъюнкций $K_1, \dots, K_t$ может появиться конъюнкция $\bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_s}$. Поэтому функцию $x_1 \vee \bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_s}$ получаем из функции $x_1 \vee z_1 \dots z_s$ подстановкой вместо переменных $z_1, \dots, z_s$ функций $x_1 \vee \bar{x}_{i_1}, \dots, x_1 \vee \bar{x}_{i_s}$.

Утверждения для классов $I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty$ получаем с использованием принципа двойственности. Лемма доказана.

Теорема 5. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе O^∞ и не содержащийся в классе D, совпадает с одним из классов O^∞, O_0^∞, MO^∞, MO_0^∞. Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе I^∞ и не содержащийся в классе K, совпадает с одним из классов I^∞, I_1^∞, MI^∞, MI_1^∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq O^\infty$ и $F \nsubseteq D$. Если $F \subseteq M$, то в силу леммы 3 имеем $(x \vee yz) \in F$. Поэтому при $F \subseteq T_0$ получаем $F = MO_0^\infty$. Если же $F \nsubseteq T_0$, то из соотношения $F \subseteq M$ легко следует, что $1 \in F$. Далее применяем лемму 4 и приходим к равенству $F = MO^\infty$.

Пусть $F \nsubseteq M$. Из леммы 3 следует, что в класс F входит одна из функций $x \vee \bar{y}$, $x \vee y\bar{z}$. При $(x \vee \bar{y}) \in F$, согласно лемме 4, получаем $F = O^\infty$. Предположим, что $(x \vee y\bar{z}) \in F$. В случае $F \subseteq T_0$ лемма 4 приводит к равенству $F = O_0^\infty$. Если же $F \nsubseteq T_0$, то ввиду соотношения $F \subseteq O^\infty$ классу F принадлежит константа 1. Подстановка 1 в функцию $x \vee y\bar{z}$ дает функцию $x \vee \bar{z}$.

Случай $F \subseteq I^\infty$ рассматривается двойственным образом. Теорема доказана.

§ 5. Замкнутые классы, лежащие в классах T_1 и T_0

Лемма 5. *Пусть $f_1 \in T_1 \setminus S$, $f_2 \in T_1 \setminus L$. Тогда множество $[f_1, f_2]$ содержит хотя бы одну из функций $x \vee y$, xy.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $f_1(x_1, \dots, x_n) \notin S$ следует, что для некоторого набора $(a_1, \dots, a_n)$ выполняется равенство

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = f_1(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Заменим в функции $f_1(x_1, \dots, x_n)$ переменной x все переменные x_i, для которых $a_i = 0$, и переменной y все остальные переменные. Получим функцию $g_1(x, y)$, которая, очевидно, принадлежит множеству $T_1 \setminus S$. Поэтому

$$g_1(x, y) \in \{1,\ x \vee y,\ xy,\ x + y + 1,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee y\}.$$

В последних трех случаях функция $g_1(x, x)$ есть константа 1. Таким образом, в множество $[f_1]$ входит одна из функций $1, x \vee y, xy$.

Если $1 \in [f_1]$, то согласно утверждению, двойственному лемме о нелинейной функции, подстановкой константы 1 и переменных x, y из функции f_2 можно получить нелинейную функцию $g_2(x, y)$. Понятно, что $g_2 \in T_1$. Поэтому

$$g_2(x, y) \in \{x \vee y,\ xy,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee y\}.$$

Однако функция $x \vee y$ порождается функцией $x \vee \bar{y}$. Лемма доказана.

Пусть $z(f)$ равно числу элементов в наименьшем множестве наборов, на которых функция f обращается в нуль и которые не имеют общей нулевой компоненты. Для любого $m \geq 2$ положим

$$d_m(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j.$$

Следующие леммы 6 и 7 являются ключевыми в данном доказательстве теоремы Поста.

Лемма 6. *Пусть* $f \notin O^\infty$ *и* $f \neq 0$. *Тогда множество* $[x \vee y, f]$ *содержит функцию* d_m, *где* $m \leq \max(2, z(f))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $f(x_1, \ldots, x_n) \notin O^\infty$ следует, что для всякого $i, 1 \leq i \leq n$, найдется такой набор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 1$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Пусть $\{a^1, \ldots, a^m\}$ — наименьшее множество наборов, которое для любого $i, 1 \leq i \leq n$, содержит набор a с указанным свойством. Очевидно, что $m \leq n$.

Если $m = 1$, то $f(1, \ldots, 1) = 0$ и $f(x, \ldots, x) \in \{0, \bar{x}\}$. В случае $f(x, \ldots, x) = 0$ применяем следствие из леммы 3 и с помощью константы 0 получаем функцию d_2. При $f(x, \ldots, x) = \bar{x}$ система $\{x \vee y, f\}$ полна в P_2 и, следовательно, вновь $d_2 \in [x \vee y, f]$.

Пусть $m \geq 2$. Заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

в которой по строкам расположены элементы наборов $a^1, a^2, \ldots, a^m$, не содержит нулевых столбцов, но после удаления любой строки такой столбец появляется. Значит, в матрице (5) можно так переставить столбцы, что образуется матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b^1_{m+1} & \ldots & b^1_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b^2_{m+1} & \ldots & b^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b^m_{m+1} & \ldots & b^m_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

(напомним, что $m \leq n$). Обозначим через $g(x_1, \ldots, x_n)$ функцию, которая получается из функции f в результате соответствующей перестановки переменных. По определению функция g принимает значение 0 на всех наборах, образующих строки матрицы (6).

Мы хотим далее получить из функций $x \vee y, g$ функцию h от m переменных, которая принимает значение 0 на всех наборах с одной единичной компонентой. Если $m = n$, то в качестве функции h можно взять функцию g. Пусть $m < n$. Для любого $i, 1 \leq i \leq n - m$, суперпозициями функции $x \vee y$ определим функцию

$$h_i(x_1, \ldots, x_m) = b^1_{m+i} x_1 \vee b^2_{m+i} x_2 \vee \ldots \vee b^m_{m+i} x_m$$

(определение функции h_i корректно, поскольку $(b^1_{m+i}, \ldots, b^m_{m+i}) \neq (0, \ldots, 0)$). Тогда можно положить

$$h(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m, h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, h_{n-m}(x_1, \ldots, x_m)).$$

Пользуясь следствием из леммы 3 и леммой 4, выберем в классе $MO_0^\infty \subseteq [x \vee y, f]$ функцию $y \vee d_m(x_1, \ldots, x_m)$. Если $h(0, \ldots, 0) = 0$, то функция d_m получается из последней функции подстановкой функции $h(x_1, \ldots, x_m)$ вместо переменной y.

Пусть $h(0, \ldots, 0) = 1$. Как в предыдущем случае, образуем функцию

$$h_1(x_1, \ldots, x_m) = h(x_1, \ldots, x_m) \vee d_m(x_1, \ldots, x_m).$$

Замечаем теперь, что

$$h_1(x_1 \vee h_1(x_1, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m) = d_m(x_1, \ldots, x_m).$$

Лемма доказана.

Согласно лемме 6 при выполнении условий $f \notin O^\infty, f \neq 0$ множество $[x \vee y, f]$ содержит некоторую функцию d_m. Обозначим через $p(f)$ такое наименьшее m, что $d_m \in [x \vee y, f]$.

В доказательстве леммы 7 используется свойство *мажоритарности* функций d_m ($m \geq 3$): при любом $i, 1 \leq i \leq m$,

$$d_m(x, \ldots, x, x_i, x, \ldots, x) = x.$$

Лемма 7. *Пусть $f \in T_1 \setminus O^\infty$. Тогда $f \in [x \vee \bar{y}, d_{p(f)}]$. Если дополнительно $f \in T_0$ или $f \in M$, то соответственно $f \in [x \vee y\bar{z}, d_{p(f)}]$ или $f \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p(f) = 2$. Тогда утвержение леммы вытекает из установленных ранее соотношений

$$[x \vee \bar{y}, xy] = T_1, \quad [x \vee y\bar{z}, xy] = T_{01}, \quad [x \vee y, xy] = M_{01}.$$

Пусть $p(f) \geq 3$ и $\{a^1, \ldots, a^t\}$ — наименьшее множество наборов, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 0 и которые не имеют общей нулевой компоненты. Если $t < p(f)$, то, согласно лемме 6, в множество $[x \vee y, f]$ входит функция d_m, где $m < p(f)$. Это противоречит определению числа $p(f)$. Значит, $t \geq p(f)$.

Предположим, что $f \in M$. Напомним, что верхним нулём функции f называется такой набор a, что $f(a) = 0$ и $f(b) = 1$ для любого набора b, который строго больше набора a. Заметим, что все наборы $a^1, \ldots, a^t$ можно считать верхними нулями функции f. В самом деле, если набор a^i не является верхним нулём функции f, то его можно заменить верхним нулём a, который строго больше набора a^i (заметим, что все единичные компоненты набора a^i являются единичными компонентами набора a). Понятно, что наборы $a^1, \ldots, a^{i-1}, a, a^{i+1}, \ldots, a^t$ также не имеют общей нулевой компоненты.

Для любого $i, 1 \leq i \leq p(f)$, обозначим через f_i такую монотонную функцию из класса T_1, что $f_i(a^i) = 1$ и $f_i(a) = f(a)$ при $a \neq a^i$ (монотонность функции f_i следует из того, что $f \in M$ и a^i — верхний нуль функции f). Из свойства мажоритарности функции $d_{p(f)}$ следует, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_{p(f)}(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{p(f)}(x_1, \ldots, x_n)). \qquad (7)$$

Таким образом, если функции $f_1, \ldots, f_{p(f)}$ принадлежат множеству $[x \vee yz, d_{p(f)}]$, то и $f \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$.

Если $f_i \in O^\infty$, то, согласно лемме 4, имеем $f_i \in [x \vee yz]$. Пусть $f_i \notin O^\infty$. Тогда $f_i \in [x \vee y, f]$. Действительно, согласно следствию из леммы 3, множество $[x \vee y, f]$ содержит функцию $x \vee yz$. Если в наборе a^i равны 1 компоненты с номерами $j_1, \ldots, j_k$, то функция f_i получается подстановкой функции f вместо переменной y в функцию $y \vee x_{j_1} \ldots x_{j_k}$, которая входит в множество $[x \vee yz]$. Из соотношения $f_i \in [x \vee y, f]$ следует, что $p(f_i) \geq p(f)$. Вместе с тем, как легко видеть, при $p > p(f)$ имеем $d_p \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$. Далее поступаем с функцией f_i так же, как и с функцией f. Этот индуктивный процесс продолжается до тех пор, пока не будут получены функции, входящие в класс O^∞.

Пусть теперь $f \in T_0 \setminus M$. Так же, как в случае $f \in M$, определяем функции $f_1, \ldots, f_{p(f)}$ из класса T_{01} (при этом $a^1, \ldots, a^t$ могут быть любыми ненулевыми наборами) и приходим к тождеству (7). Если $f_i \in O^\infty$, то $f_i \in O_0^\infty$ и применение леммы 4 дает $f_i \in [x \vee y\bar{z}]$. Пусть $f_i \notin O^\infty$. По следствию из леммы 3 имеем $(x \vee y\bar{z}) \in [x \vee y, f]$. Если, например, в наборе a^i равны 1 первые k компонент (причем $k \geq 1$, поскольку набор a^i отличен от нулевого набора), то $f_i = f \vee x_1 \ldots x_k \bar{x}_{k+1} \ldots \bar{x}_n$, где функция $y \vee x_1 \ldots x_k \bar{x}_{k+1} \ldots \bar{x}_n$ входит в множество $[x \vee y\bar{z}]$. Таким образом, $f_i \in [x \vee y, f]$. Как и выше, из включения $f_i \in [x \vee y, f]$ следует, что $p(f_i) \geq p(f)$. Наконец, дальнейший индуктивный процесс рассмотрения функций f_i обрывается при получении функций, входящих либо в класс O^∞, либо в класс M.

Пусть $f \in T_1 \setminus T_0$. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что при $f_i \in O^\infty$ лемма 4 дает $f_i \in [x \vee \bar{y}]$, а при $f_i \notin O^\infty$ следствие из леммы 3 — $(x \vee \bar{y}) \in [x \vee y, f]$. Лемма доказана.

Положим

$$M_0 = M \cap T_0, \quad M_1 = M \cap T_1, \quad M_{01} = M \cap T_{01}.$$

С использованием следствия из теоремы П3 легко получаем, что базисами в классах M_0, M_1, M_{01} являются соответственно системы функций

$$\{0, x \vee y, xy\}, \quad \{1, x \vee y, xy\}, \quad \{x \vee y, xy\}.$$

Для любого $m \geq 2$ обозначим через O^m множество всех таких функций f, что любые m наборов, на которых функция f принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту. Положим

$$O_0^m = O^m \cap T_0, \quad MO^m = M \cap O^m, \quad MO_0^m = M \cap O_0^m.$$

Двойственным образом (с заменой 0 на 1) определяем классы I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m.

Нетрудно убедиться в том, что O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m — замкнутые классы,

$$MO_0^m \subset MO^m \subset O^m, \quad MO_0^m \subset O_0^m \subset O^m,$$

$d_{m+1} \in MO_0^m$ и $d_m \notin MO_0^m$.

Теорема 6. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе T_1 и не содержащийся в классах S, L, O^∞, I^∞, совпадает с одним из следующих классов*:

$$T_1 = [x \vee \bar{y}, xy], \quad M_1 = [1, x \vee y, xy], \quad O^m = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}],$$

$$T_{01} = [x \vee y\bar{z}, xy], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}],$$

$$MO^m = [1, d_{m+1}] \ (m = 2, 3, \ldots), \quad MO_0^2 = [x \vee y, d_3],$$

$$MO_0^m = [d_{m+1}] \ (m = 3, 4, \ldots), \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*] \ (m = 2, 3, \ldots),$$

$$MI_1^2 = [xy, d_3], \quad MI_1^m = [d_{m+1}^*] \ (m = 3, 4, \ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq T_1$ и

$$F \nsubseteq S, \quad F \nsubseteq L, \quad F \nsubseteq O^\infty, \quad F \nsubseteq I^\infty.$$

Согласно лемме 5 классу F принадлежит одна из функций $x \vee y, xy$.

Предположим сначала, что $(x \vee y) \in F$. По лемме 6 в класс F входит некоторая функция d_{m+1}. Будем считать, что m выбрано наименьшим возможным. Функция $y \vee d_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1})$ из множества $F^\infty = F \cap O^\infty$, очевидно, не принадлежит классу D. Поэтому согласно теореме 5 класс F^∞ совпадает с одним из классов $O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$.

Пусть $m = 1$. Тогда $xy \in F$. Если $F^\infty = O^\infty$, то (см. лемму 4) классу F принадлежит функция $x \vee \bar{y}$. Поскольку $[x \vee \bar{y}, xy] = T_1$, в этом случае получаем $F = T_1$. Если $F^\infty = O_0^\infty$, то все функции класса F сохраняют 0 (иначе ввиду $F \subseteq T_1$ было бы $1 \in F^\infty$). Кроме того (см. лемму 4), имеем $(x \vee y\bar{z}) \in F$. Однако $[x \vee y\bar{z}, xy] = T_{01}$. Следовательно, в этом случае $F = T_{01}$. Аналогичные рассуждения в случаях $F^\infty = MO^\infty$ и $F^\infty = MO_0^\infty$ показывают, что $F = M_1$ или $F = M_{01}$.

Предположим, что $m \geq 2$. Пусть $F^\infty = O^\infty$. Если $f \in F \setminus O^\infty$ и $p(f) = m + 1$, то в силу леммы 7 получаем $f \in [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$. Если $f \in F \setminus O^\infty$ и $p(f) > m + 1$, то соотношение $f \in [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$ следует из леммы 7 и соотношения $d_{p(f)} \in [x \vee y, d_{m+1}]$. Если же $f \in O^\infty$, то $f \in [x \vee \bar{y}]$ согласно лемме 4. Таким образом, в рассматриваемом случае $F = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$. Вместе с тем функции $x \vee \bar{y}, d_{m+1}$ принадлежат классу O^m и класс O^m не содержит функций d_p при $p \leq m$. Следовательно,

$$F = O^m = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}].$$

Пусть $F^\infty = O_0^\infty$. Тогда все функции класса F сохраняют 0, т.е. $F \subseteq T_{01}$. Далее повторяем те же рассуждения, что и в случае $F = O^\infty$, пользуясь леммой 7 для класса T_0 и леммой 4 для класса O_0^∞. В результате приходим к равенствам

$$F = O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}].$$

Случаи $F^\infty = MO^\infty$ и $F^\infty = MO_0^\infty$ рассматриваются аналогичным образом. Стоит лишь отметить, что при $m \geq 3$ функция $x \vee yz$ (а значит, и функция $x \vee y$) получается из функции d_{m+1} отождествлением переменных: $x \vee yz = d_{m+1}(x, \ldots, x, y, z)$.

Предположим теперь, что в класс F входит функция xy. Рассмотрим класс $F_0 = F \cap T_0$. Предыдущее доказательство в силу принципа двойственности дает все замкнутые классы, лежащие в классе F_0 и не содержащиеся в классах S, L, O^∞, I^∞:

$$T_{01} = [x \vee y\bar{z}, xy], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*] \; (m = 2, 3, \ldots),$$
$$MI_1^2 = [xy, d_3], \quad MI_1^m = [d_{m+1}^*] \quad (m = 3, 4, \ldots).$$

Если же в класс F входит функция f, не сохраняющая 0, то ввиду включения $F \subseteq T_1$ имеем $f(x, \ldots, x) = 1$. Добавление константы 1 к классам $T_{01}, M_{01}, I_1^m, MI_1^m$ приводит к уже полученным классам T_1 и M_1. Это вытекает из следующих очевидных соотношений:

$$[1, x \vee y\bar{z}, xy] = [1, x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*] = T_1,$$
$$[1, xy, d_3] = [1, d_{m+1}^*] = M_1 \; (m = 3, 4, \ldots).$$

Теорема доказана.

Двойственной к теореме 6 является теорема 7.

Теорема 7. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе T_0 и не содержащийся в классах S, L, O^∞, I^∞, совпадает с одним из следующих классов*:

$$T_0 = [x \vee y, x\bar{y}], \quad M_0 = [0, x \vee y, xy], \quad I^m = [x\bar{y}, d_{m+1}^*],$$
$$T_{01} = [x \vee y, x(y \vee \bar{z})], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*],$$
$$MI^m = [0, d_{m+1}^*] \; (m = 2, 3, \ldots), \quad MI_1^2 = [xy, d_3],$$
$$MI_1^m = [d_{m+1}^*] \; (m = 3, 4, \ldots), \quad O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}] \; (m = 2, 3, \ldots),$$
$$MO_0^2 = [x \vee y, d_3], \quad MO_0^m = [d_{m+1}] \; (m = 3, 4, \ldots).$$

§ 6. Основной результат

Теорема Поста. *Совокупность всех замкнутых классов булевых функций счётна и состоит из следующих классов.*

1. *Классы, содержащие константы* 0 *и* 1 :

$$P_2,\ L,\ M,\ D,\ K,\ U,\ MU,\ C.$$

2. *Классы, содержащие* 0 *и не содержащие* 1 :

$$L_0,\ M_0,\ T_0,\ D_0,\ K_0,\ U_0,\ C_0,\ I^m,\ MI^m\ (m = 2, 3, \ldots, \infty).$$

3. *Классы, содержащие* 1 *и не содержащие* 0 :

$$L_1,\ M_1,\ T_1,\ D_1,\ K_1,\ U_1,\ C_1,\ O^m,\ MO^m\ (m = 2, 3, \ldots, \infty).$$

4. *Классы, не содержащие* 0 *и* 1 :

$$L_{01},\ M_{01},\ S_{01},\ T_{01},\ D_{01},\ K_{01},\ U_{01},\ S,\ SL,\ SM,\ SU,$$

$$I_1^m,\ MI_1^m,\ O_0^m,\ MO_0^m \quad (m = 2, 3, \ldots, \infty).$$

Каждый из перечисленных замкнутых классов порождается конечной системой своих функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 1 из теоремы П4 всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от класса P_2, целиком содержится в одном из классов S, M, L, T_0, T_1. Теоремы 1–7 описывают все замкнутые классы, которые целиком лежат в классах T_0, T_1, S, L, D, K. Остаётся исследовать замкнутые классы $F \subseteq M$, которые не содержатся в классах T_0, T_1, S, L, D, K. Однако из $F \subseteq M$ и $F \not\subseteq T_0$ следут, что в класс F входит константа 1. Аналогично, из соотношений $F \subseteq M$ и $F \not\subseteq T_1$ следует, что $0 \in F$. Кроме того, лемма о нелинейной функции позволяет утверждать, что в классе F имеется монотонная нелинейная функция от переменных x, y, т.е. $x \vee y$ или xy.

Пусть, например, $(x \vee y) \in F$. Поскольку $F \not\subseteq D$, в классе F есть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая не является дизъюнкцией. Тогда классу F принадлежит функция $g = y \vee f(x_1, \ldots, x_n)$, входящая в множество $O^\infty \setminus D$. Согласно теореме 5 класс $[g]$ может совпадать лишь с одним из классов MO^∞, MO_0^∞. В обоих случаях $(x \vee yz) \in [g]$. Подстановкой константы 0 получаем из функции $x \vee yz$ конъюнкцию yz. Таким образом, $\{0, 1, x \vee y, xy\} \subset F$. Однако $[0, 1, x \vee y, xy] = M$. Следовательно, в этом случае $F = M$.

Двойственным образом рассматривается случай, когда $xy \in F$. Теорема доказана.

Полный перечень замкнутых классов булевых функций приведён ниже в таблице. Диаграмма включений всех замкнутых классов булевых функций представлена на рисунке.

Замкнутый класс	Пример базиса
Классы, содержащие константы 0 и 1	
P_2	$\bar{x}, x \vee y$
M	$0, 1, x \vee y, xy$
L	$1, x + y$
D	$0, 1, x \vee y$
K	$0, 1, xy$
U	$1, \bar{x}$
MU	$0, 1, x$
C	$0, 1$
Классы, содержащие 1 и не содержащие 0	
T_1	$x \vee \bar{y}, xy$
M_1	$1, x \vee y, xy$
L_1	$x + y + 1$
D_1	$1, x \vee y$
K_1	$1, xy$
U_1	$1, x$
C_1	1
O^m $(m = 2, 3, \ldots)$	$x \vee \bar{y}, d_{m+1}$
MO^m $(m = 2, 3, \ldots)$	$1, d_{m+1}$
O^∞	$x \vee \bar{y}$
MO^∞	$1, x \vee yz$
Классы, содержащие 0 и не содержащие 1	
T_0	$x \vee y, x\bar{y}$
M_0	$0, x \vee y, xy$
L_0	$x + y$
D_0	$0, x \vee y$
K_0	$0, xy$
U_0	$0, x$
C_0	0

Замкнутый класс	Пример базиса
Классы, содержащие 0 и не содержащие 1	
I^m $(m=2,3,\ldots)$	$x\bar{y}, d^*_{m+1}$
MI^m $(m=2,3,\ldots)$	$0, d^*_{m+1}$
I^∞	$x\bar{y}$
MI^∞	$0, x(y\vee z)$
Классы, не содержащие 0 и 1	
T_{01}	$xy, x\vee y\bar{z}$
S_{01}	$d_3(x,y,\bar{z})$
M_{01}	$x\vee y, xy$
L_{01}	$x+y+z$
D_{01}	$x\vee y$
K_{01}	xy
U_{01}	x
S	$\bar{x}, d_3$
SM	d_3
SL	$x+y+z+1$
SU	$\bar{x}$
O_0^m $(m=2,3,\ldots)$	$x\vee y\bar{z}, d_{m+1}$
MO_0^2	$x\vee y, d_3$
MO_0^m $(m=3,4,\ldots)$	d_{m+1}
I_1^m $(m=2,3,\ldots)$	$x(y\vee\bar{z}), d^*_{m+1}$
MI_1^2	xy, d_3
MI_1^m $(m=3,4,\ldots)$	d^*_{m+1}
O_0^∞	$x\vee y\bar{z}$
MO_0^∞	$x\vee yz$
I_1^∞	$x(y\vee\bar{z})$
MI_1^∞	$x(y\vee z)$

1

§ 7. Частичные булевы функции

Понятие частичной булевой функции естественно возникает в ситуациях, когда значения булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ известны не на всём множестве E_2^n, а только на некотором его собственном подмножестве E, и отсутствует информация о возможном поведении функции f на множестве $E_2^n \setminus E$. Удобно считать, что в случае, когда функция f не определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, она „принимает“ значение „неопределённость“. Для обозначения неопределённости будем использовать символ $*$. Таким образом, тот факт, что функция f не определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, будем записывать в виде $f(a_1, \ldots, a_n) = *$.

Итак, под *частичной булевой функцией* будем понимать функцию, аргументы которой принимают значения из множества E_2, а сама функция — значения из множества $E_2 \cup \{*\}$.

Множество всех частичных булевых функций обозначим через P_2^*. Отметим, что при любом $n \geq 1$ множеству P_2^* принадлежит n-местная *нигде не определённая функция* — функция, которая принимает значение $*$ на всём множестве E_2^n. Все такие функции будем также обозначать символом $*$.

По аналогии с обычными булевыми функциями для частичных булевых функций можно ввести понятия существенной и фиктивной переменных. Мы дадим определение только фиктивной переменной. Будем говорить, что частичная булева функция $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ получена из частичной булевой функции функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью *введения фиктивной переменной* x_{n+1}, если для любых значений переменных $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ справедливо равенство

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что данное равенство понимается абсолютно — как обычное отношение равенства на трёхэлементном множестве $\{0, 1, *\}$.

Определение операции суперпозиции на множестве частичных булевых функций можно дать различными способами. Мы остановимся на следующем наиболее распространённом способе. Чтобы не отягощать определение мелкими техническими деталями, рассмотрим лишь „регулярную“ суперпозицию вида

$$f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Считаем, что функция, задаваемая данной суперпозицией, определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ в том и только том случае, когда на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ определены все функции $f_1, \ldots, f_m$, а на наборе

$$(f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_m(a_1, \ldots, a_n))$$

— функция f_0.

Как и для обычных булевых функций, для частичных булевых функций на основе понятий формулы и функции, реализуемой формулой, можно ввести понятия замыкания, замкнутого класса, полноты, порождающей системы и базиса.

Положим

$$e(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Т е о р е м а 8. *Система функций* $\{\bar{x}, x \vee y, e(x, y)\}$ *полна в классе* P_2^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из P_2^*. Суперпозициями функций $\bar{x}, x \vee y$ определим такие (всюду определённые) функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)$, что для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_2^n

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_2(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

если значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ определено, и $f_1(a_1, \ldots, a_n) \neq f_2(a_1, \ldots, a_n)$ в противном случае. Тогда будем иметь

$$f(x_1, \ldots, x_n) = e(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $g(x)$ *— любая функция из* P_2^*, *которая определена только в одной точке, то система* $\{\bar{x}, x \vee y, g(x)\}$ *полна в классе* P_2^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что одна из функций

$$g(x), \quad g(\bar{x}), \quad \bar{g}(x), \quad \bar{g}(\bar{x})$$

совпадает с функцией $h(x)$, где $h(0) = 0$ и $h(1) = *$. Далее получаем

$$e(x, y) = x \vee h(x + y).$$

Следствие доказано.

Наша следующая цель — сформулировать для класса P_2^* критерий функциональной полноты. Для этого определим в P_2^* следующие 8 классов:

$P_2 \cup \{*\}$;
$T_0^* = \{f : f \in P_2^*$ и f можно доопределить до функции из $T_0\}$;
$T_1^* = \{f : f \in P_2^*$ и f можно доопределить до функции из $T_1\}$;
$S^* = \{f : f \in P_2^*$ и f можно доопределить до функции из $S\}$;
$M^* = \{f : f \in P_2^*$ и f можно доопределить до функции из $M\}$;
$L^* = \{f : f \in P_2^*$ и при подстановке в функцию f на места всех переменных любых функций из множества $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}, x + y, x + y + 1\}$ получается либо функция из этого множества, либо не всюду определённая функция$\}$;
$T_{01}^* = \{f : f \in P_2^*$ и либо $f(0, \ldots, 0) = 0$ и $f(1, \ldots, 1) = 1$, либо $f(0, \ldots, 0) = *$, либо $f(1, \ldots, 1) = *\}$;
$U^* = \{f : f \in P_2^*$ и при подстановке в функцию f на места всех переменных любых функций из множества $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ получается либо функция из этого множества, либо не всюду определённая функция$\}$.

Исходя непосредственно из определения суперпозиции, нетрудно доказать замкнутость всех классов

$$P_2 \cup \{*\}, \quad T_0^*, \quad T_1^*, \quad S^*, \quad M^*, \quad L^*, \quad T_{01}^*, \quad U^*. \tag{8}$$

Отметим, что имеют место строгие включения

$$T_0 \subset T_0^*,\ T_1 \subset T_1^*,\ S \subset S^*,\ M \subset M^*,\ L \subset L^*,\ T_{01} \subset T_{01}^*,\ U \subset U^*.$$

Можно показать также, что ни один из классов (8) целиком не содержится в другом. Выделим здесь только два случая: функция $g(x, y, z)$ из класса $S^* \cap U^*$, которая определена лишь на четырёх наборах,

$$g(0, 0, 0) = g(0, 1, 1) = g(1, 0, 1) = 0, \quad g(1, 1, 0) = 1,$$

не принадлежит классу L^*.

Следующая теорема доказана Р.В.Фрейвалдом [11].

Теорема 9 (критерий функциональной полноты в классе P_2^*). *Система частичных булевых функций полна в классе P_2^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов* (8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия теоремы следует из замкнутости классов (8) и несовпадении их с классом P_2^*. Установим достаточность условия теоремы.

Пусть система функций из P_2^* целиком не содержится ни в одном из классов (8). Выберем в ней функции $f_1, \ldots, f_8$, которые не принадлежат соответственно классам $P_2 \cup \{*\}, \ldots, U^*$. Докажем, что система функций $\{f_1, \ldots, f_8\}$ полна в классе P_2^*.

Сначала с помощью функций f_2, f_3, f_4, f_7 получим константы. Очевидно, что функция $f_7(x, \ldots, x)$ (не входящая в класс T_{01}^*) совпадает с одной из функций $0, 1, \bar{x}$. Поскольку $f_2(0, \ldots, 0) = 1$ и $f_3(1, \ldots, 1) = 0$, в первых двух случаях из одной константы с помощью функций f_2 или f_3 образуем другую константу. В третьем случае рассмотрим функцию $f_4(x_1, \ldots, x_m)$ (не входящую в класс S^*), которая, очевидно, обладает следующим свойством: существует такой набор $(a_1, \ldots, a_m) \in E_2^m$, что

$$f_4(a_1, \ldots, a_m) = f_4(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \neq *.$$

Из него следует, что функция $f_4(x + a_1, \ldots, x + a_m)$ будет некоторой константой. Другую константу, как и выше, получаем с помощью функций f_2, f_3.

Далее построим функцию $\bar{x}$. Из условия $f_5(x_1, \ldots, x_n) \notin M^*$ вытекает, что найдутся такие два набора $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$, что

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \text{ и } f_5(a_1, \ldots, a_n) = 1,\ f_5(b_1, \ldots, b_n) = 0.$$

Как и в лемме о немонотонной функции, заменим в функции $f_5(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ переменную x_i $(1 \leq i \leq n)$ константой a_i, если $a_i = b_i$, и переменной x, если $a_i \neq b_i$ (в этом случае непременно $a_i = 0$ и $b_i = 1$). В результате этой замены образуется функция $\bar{x}$.

Перейдём к функции $f_8(x_1, \ldots, x_k)$ (она не входит в класс U^*). Согласно определению класса U^* существуют такие функции $g_1(x, y), \ldots$ $\ldots, g_k(x, y)$ из множества $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$, что функция

$$g(x, y) = f_8(g_1(x, y), \ldots, g_k(x, y))$$

не входит в множество $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$. Если функция $g(x, y)$ нелинейна (а все нелинейные функции от переменных x, y суть

$$x \vee y,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee y,\ \bar{x} \vee \bar{y},\ xy,\ x\bar{y},\ \bar{x}y,\ \bar{x}\bar{y}),$$

то вместе с функцией $\bar{x}$ она образует полную в P_2 систему.

Пусть функция $g(x, y)$ линейна (т.е. $g(x, y) \in \{x + y, x + y + 1\}$). Поскольку функция $\bar{x}$ уже построена, можно считать, что в этом случае имеются обе функции $x + y$ и $x + y + 1$. Теперь рассматриваем функцию

f_6 (не входящую в класс L^*) и так же, как для функции f_8, подстановкой в функцию f_6 на места всех переменных подходящих функций из множества $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}, x+y, x+y+1\}$ получаем нелинейную функцию от двух переменных. В результате вновь приходим к полной в P_2 системе.

Рассмотрим, наконец, функцию f_1. Очевидно, что можно найти такую пару соседних (отличающихся только в одной координате) наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, что функция f_1 определена только на одном из этих наборов. Подставим в функцию f_1 константы 0,1 вместо всех тех переменных, которым в наборах $\tilde{a}, \tilde{b}$ отвечают равные значения, и переменную x вместо единственной оставшейся переменной. Получим функцию $g_1(x)$, которая определена только в одной точке. Далее применяем следствие из теоремы 8. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что с точки зрения функциональной выразимости случай частичных булевых функций каридинально отличается от случая обычных булевых функций.

Теорема 10. *В P_2^* имеется континуальное число различных замкнутых классов.*

Доказательство. Определим последовательность $\{f_i(x_1, \ldots, x_i);$ $i = 2, 3, \ldots\}$ функций из P_2^*: для любого набора $(a_1, \ldots, a_i)$ из E_2^i пусть

$$f_i(a_1, \ldots, a_i) = \begin{cases} 0, & \text{если набор } (a_1, \ldots, a_i) \text{ содержит ровно одну} \\ & \text{единицу,} \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что никакая функция f_i не выражается формулой над множеством функций $\{f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots\}$. В силу стандартных рассуждений отсюда будет следовать требуемое в теореме утверждение.

Доказательство проведём от противного. Предположим, что Φ — формула над множеством функций $\{f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, \}$, которая реализует функцию f_i. В формулу Φ непременно входит подформула вида $f_j(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j})$, где

$$\{k_1, \ldots, k_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, i\} \text{ и } j \neq i.$$

Если $j < i$, то рассмотрим набор $(a_1, \ldots, a_i)$, который содержит ровно одну единицу и в котором $a_{k_1} = \ldots = a_{k_j} = 0$. Функция $f_j(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j})$ не определена на этом наборе. Значит, согласно определению суперпозиции частичных булевых функций, на данном наборе будет не определена и вся функция, реализуемая формулой Φ. Получили противоречие.

Допустим, что $j > i$. Тогда среди чисел $k_1, \ldots, k_j$ есть хотя бы два одинаковых. Пусть, например, $k_1 = k_2$. Рассмотрим набор $(a_1, \ldots, a_i)$, в котором равна 1 только компонента a_{k_1}. Тогда значение функции $f_j(x_{k_1}, \ldots$ $\ldots, x_{k_j})$ на наборе $(a_1, \ldots, a_i)$ не определено и, как и выше, мы приходим к противоречию. Теорема доказана.

Глава 2. Предполные классы многозначной логики

В этой главе при любом $k \geq 3$ будут определены все предполные классы в P_k. В качестве языка, на котором будут описаны предполные классы, выбран предикатный язык, на котором формулируется важное понятие „функция, сохраняющая предикат“. В параграфе 3 излагаются первоначальные сведения по однородным функциям — функциям, играющим в теории функций многозначной логики важную роль в вопросах полноты и конечной порождаемости.

§ 1. Отношение сохранения предиката функцией

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). *Предикатом на множестве* E_k будем называть функцию $\rho(x_1, \ldots, x_m)$, отображающую множество E_k^m в множество {И,Л}, где И,Л — истинностные значения „истина“ и „ложь“. Если $(a_1, \ldots, a_m) \in E_k^m$ и $\rho(a_1, \ldots, a_m)$ =И (Л), то говорим, что набор $(a_1, \ldots, a_m)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) предикату ρ. Множество всех предикатов на E_k обозначим через Π_k.

Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — предикат из множества Π_k, $f(y_1, \ldots, y_n)$ — функция из класса P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ *сохраняет предикат* $\rho(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых n наборов

$$(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn}),$$

удовлетворяющих предикату ρ, набор

$$(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$$

также удовлетворяет предикату ρ.

Множество истинности (непустого) предиката $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ удобно изображать в виде матрицы X_ρ, состоящей из m строк. Наборы $(a_1, \ldots$ $\ldots, a_m)$, удовлетворяющие предикату ρ, записываются в матрице X_ρ (сверху вниз) в виде столбцов, так что элемент a_1 стоит в первой строке, элемент a_2 — во второй и т. д. Порядок столбцов в матрице X_ρ, как правило, несуществен.

В качестве примера рассмотрим предикат

$$\rho(x_1, x_2) \equiv (x_1 \leq x_2)$$

из множества Π_2. Его матрица X_ρ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение сохранения предиката $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ функцией $f(y_1, \ldots$ $\ldots, y_n)$ можно задать в весьма наглядной форме на "матричном" языке. Пусть матрица X_ρ предиката ρ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{ks} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Для произвольных n чисел $i_1, \ldots, i_n$, где $1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq s$, из i_1-го,... ..., i_n-го столбцов матрицы X_ρ образуем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_n} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Затем к ней по строкам "применим" функцию f:

$$f \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{1i_1}, a_{1i_2}, \ldots, a_{1i_n}) \\ f(a_{2i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{2i_n}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(a_{mi_1}, a_{mi_2}, \ldots, a_{mi_n}) \end{pmatrix}.$$

Полученный в результате столбец значений также должен быть столбцом матрицы X_ρ.

Для любого предиката ρ из Π_k через $\mathrm{Pol}(\rho)$ обозначим множество всех функций, сохраняющих предикат ρ. Отметим два свойства множеств $\mathrm{Pol}(\rho)$.

1. Для любого предиката ρ множество $\mathrm{Pol}(\rho)$ содержит все селекторные функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$.

В самом деле, при применении функции e_i^n к матрице (10) в качестве значения получается ее i-й столбец, то есть один из столбцов матрицы (9) предиката ρ.

2. Для любого предиката ρ множество $\mathrm{Pol}(\rho)$ является замкнутым классом.

Поскольку множеству $\mathrm{Pol}(\rho)$ принадлежат все селекторные функции, для доказательства свойства 2 достаточно установить, что из $\{f_0, f_1, \ldots$ $\ldots, f_l\} \subseteq \mathrm{Pol}(\rho)$ и

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f_0(f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_l(y_1, \ldots, y_n))$$

следует $f \in \mathrm{Pol}(\rho)$. Действительно, из принадлежности функций $f_1, \ldots$ $\ldots, f_l$ множеству $\mathrm{Pol}(\rho)$ вытекает, что применение каждой из функций $f_1, \ldots, f_l$ к матрице (10) дает некоторый столбец из матрицы (9) предиката ρ. Значит, в силу включения $f_0 \in \mathrm{Pol}(\rho)$ применение функции f_0 к матрице размера $m \times l$, составленной из этих столбцов, вновь дает столбец из матрицы (9).

§ 2. Семейства предикатов, определяющих предполные классы

Все предикаты из Π_k, которые определяют предполные классы в P_k, можно разбить на шесть попарно не пересекающихся семейств **P, O, L, E, C, B**. В окончательной форме все они определены И.Розенбергом [15].

Семейство P. Предикаты этого семейства существуют при любом $k \geq 2$. Пусть π — перестановка на E_k, т.е. взаимно однозначное отображение множества E_k на себя. Предикат $\pi(x_1) = x_2$ называется *графиком перестановки* π. Нетрудно видеть, что множество $\mathrm{Pol}(\pi(x_1) = x_2)$ состоит из всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют тождеству

$$f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = \pi(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Функции f, удовлетворяющие данному тождеству, называют также функциями, *самодвойственными относительно перестановки* π. Семейство **P** состоит из всех предикатов $\rho(x_1, x_2)$, которые являются графиками перестановок, разлагающихся в произведение циклов одной и той же простой длины.

При $k = 2$ семейство **P** состоит из единственного предиката, который соответствует перестановке $\bar{x}$. Класс $\mathrm{Pol}(\bar{x}_1 = x_2)$ — это класс S всех самодвойственных булевых функций.

При $k = 3$ семейство **P** состоит из двух предикатов: $x_1 + 1 = x_2$ и $x_1 + 2 = x_2$ (сложение рассматривается по модулю 3). Как видно, они отвечают двум перестановкам: $x + 1$ и $x + 2$. Однако каждая из этих перестановок является (второй) степенью другой перестановки. Поэтому классы $\mathrm{Pol}(x_1 + 1 = x_2)$ и $\mathrm{Pol}(x_1 + 2 = x_2)$ совпадают.

Семейство O. Предикаты этого семейства существуют при любом $k \geq 2$. Пусть предикат $\rho(x_1, x_2)$ задаёт на E_k частичный порядок, т.е. рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение. Назовём частичный порядок на E_k *ограниченным*, если относительно этого порядка имеются наименьший и наибольший элементы (они, вообще говоря, не обязаны совпадать соответственно с элементами 0 и $k-1$). Семейство **O** состоит из всех двуместных предикатов ρ, которые представляют собой ограниченные частичные порядки.

Если $\rho \in$**O**, то класс $\mathrm{Pol}(\rho)$ состоит из всех функций, которые *монотонны* относительно порядка ρ. Иными словами, если $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Pol}(\rho)$ и $(a_1, \ldots, a_n) \leq_\rho (b_1, \ldots, b_n)$, то

$$f(a_1, \ldots, a_n) \leq_\rho f(b_1, \ldots, b_n).$$

При $k = 2, 3$ все ограниченные частичные порядки на E_k являются линейными порядками, при $k > 3$ это утверждение уже неверно. В случае $k = 2$ два ограниченных частичных порядка, в которых соответственно $0 \leq 1$ и $1 \leq 0$, определяют один и тот же класс M монотонных функций. В случае $k = 3$ ограниченные порядки, в которых

$$0 \leq 1 \leq 2, \quad 1 \leq 2 \leq 0, \quad 2 \leq 0 \leq 1,$$

определяют три различных класса монотонных функций. Остальные три ограниченных порядка определяют те же самые классы монотонных функций. К примеру, порядки $0 \leq 1 \leq 2$ и $2 \leq 1 \leq 0$ задают одинаковые классы монотонных функций.

Семейство L. Предикаты этого семейства существуют только в том случае, когда $k = p^l$, где p — простое число и $l \geq 1$. Как устанавливается в теории конечных групп, в этом случае на множестве E_k можно определить бинарную коммутативную операцию $+$ так, что алгебра $G = \langle E_k; + \rangle$ будет являться абелевой p-группой периода p. Иными словами, в абелевой группе G порядок любого элемента, отличного от нуля группы, будет равен p.

Для любого простого числа k в качестве операции $+$ на множестве E_k можно взять сложение по модулю k, при этом нулём соответствующей абелевой группы будет являться число 0. Более сложный пример получаем при $k = 4$. Взяв вновь в качестве нуля группы число 0, определим коммутативную операцию $+$ на E_4 соотношениями

$$x + x = 0, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 3 = 2$$

(остальные соотношения, определяющие операцию $+$, вытекают из свойств коммутативности и существования нуля группы).

Итак, если $k = p^l$ и $G = \langle E_k; +\rangle$ — абелева p-группа периода p, то семейству **L** принадлежит четырёхместный предикат

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x_1 + x_2 = x_3 + x_4).$$

Произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $\mathrm{Pol}(\rho)$ удовлетворяет следующему *условию линейности*: для любых двух наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ выполняется равенство

$$f(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + f(b_1, \ldots, b_n) - f(0, \ldots, 0),$$

где 0 — нуль соответствующей абелевой группы, а минус символизирует взятие обратного элемента в группе.

При $k = 2$ матрица предиката ρ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Этот предикат определяет в P_2 класс L линейных функций. Аналогичным образом, при любом простом k предикат ρ на E_k определяет в P_k класс всех функций, линейных по модулю k. Однако если $k = p^l$, где $l \geq 2$, то функции из класса $\mathrm{Pol}(\rho)$ имеют более сложную структуру. В этом случае на множестве E_k можно определить коммутативную операцию $\times$ так, что алгебра $\langle E_k; +, \times\rangle$ будет являться полем Галуа, а произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $\mathrm{Pol}(\rho)$ будет представима в виде

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} x_i^{p^j}.$$

Семейство E. Предикаты этого семейства существуют только при $k \geq 3$. Семейство **E** состоит из всех двуместных предикатов, которые представляют собой отношения эквивалентности на E_k, отличные от тождественно истинного отношения и от отношения равенства. Таким образом, если $\rho \in \mathbf{E}$, то отношение эквивалентности ρ разбивает множество E_k на l классов $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_l$ попарно эквивалентных элементов, где $1 < l < k$. В связи с этим класс $\mathrm{Pol}(\rho)$ иногда называют классом функций, *сохраняющих разбиение* $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_l)$.

Семейство C. Предикаты этого семейства существуют при любом $k \geq 2$. Чтобы определить предикаты семейства **C**, введем несколько новых понятий.

Для любого $m \geq 2$ положим

$$\tau_m(x_1, \ldots, x_m) \equiv \bigvee_{1 \leq i < j \leq m} (x_i = x_j).$$

Предикат $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ называется *вполне рефлексивным*, если либо $m = 1$, либо $m \geq 2$ и ρ является расширением предиката τ_m (т.е. предикату ρ удовлетворяют все наборы, которые удовлетворяют предикату τ_m). Таким образом, если $m \geq 2$ и $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — вполне рефлексивный предикат, то значение $\rho(a_1, \ldots, a_m)$ истинно для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ из E_k^m, содержащего не более $m-1$ различных элементов.

Предикат ρ называется *вполне симметричным*, если он не меняется при любой перестановке переменных. Предикат $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ называется *центральным*, если он вполне рефлексивен, вполне симметричен, отличен от тождественно истинного предиката и существует такое непустое подмножество C множества E_k (*центр предиката* ρ), что предикату ρ удовлетворяет всякий набор $(a_1, \ldots, a_m)$ из E_k^m, как только $\{a_1, \ldots, a_m\} \cap C \neq \emptyset$.

Семейство **C** состоит из всех центральных предикатов. Отметим, что в семейство **C** входят все одноместные предикаты вида $x \in C$, где C — непустое собственное подмножество множества E_k. Для предиката $x \in C$ множество C, очевидно, является центром. Функции, входящие в класс $\mathrm{Pol}(x \in C)$ называют функциями, *сохраняющими множество* C. Частным случаем указанных предикатов являются предикаты вида $x = a$, где $a \in E_k$. В P_2 классы T_0 и T_1 определяются центральными предикатами $x = 0$ и $x = 1$.

Семейство B. Предикаты этого семейства существуют только при $k \geq 3$. Чтобы определить предикаты семейства **B**, дадим еще два определения.

Пусть $h \geq 3$, $l \geq 1$ и $k = h^l$. Элемент a множества E_k можно единственным образом представить в виде

$$a = a^{(0)} + a^{(1)}h + \ldots + a^{(l-2)}h^{l-2} + a^{(l-1)}h^{l-1},$$

где $a^{(0)}, \ldots, a^{(l-1)} \in E_h$. Поэтому элемент a можно задать вектором $(a^{(0)}, \ldots, a^{(l-1)})$ размерности l, компоненты которого принадлежат множеству E_h. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — предикат на множестве E_h. Определим предикат $\rho^l(x_1, \ldots, x_m)$ на множестве E_k, который назовем l-й *декартовой степенью предиката* ρ. Если $a_1, \ldots, a_m$ — элементы из E_k, которые определяются векторами

$$(a_1^{(0)}, a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(l-1)}), \ldots, (a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(l-1)}),$$

где $a_j^{(i)} \in E_h$ при $0 \leq i \leq l-1$ и $1 \leq j \leq m$, то полагаем

$$\rho^l(a_1, \ldots, a_m) \equiv \rho(a_1^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}) \,\&\, \ldots \,\&\, \rho(a_1^{(l-1)}, \ldots, a_m^{(l-1)}).$$

Пусть $k \geq h$, $\sigma(x_1, \ldots, x_m)$ — предикат на множестве E_h и q — отображение множества E_k на множество E_h. Предикат $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на множестве E_k называется *полным прообразом предиката* σ при отображении q, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_m$ из E_k справедлива эквивалентность

$$\rho(a_1, \ldots, a_m) \equiv \sigma(q(a_1), \ldots, q(a_m)).$$

Если $h \geq 3$, $l \geq 1$, $k \geq h^l$ и q — отображение множества E_k на множество E_{h^l}, то семейству **B** принадлежит предикат, который является полным прообразом l-й декартовой степени предиката τ_h при отображении q.

Отметим, что при любом $k \geq 3$ предикат $\tau(x_1, \ldots, x_k)$ семейства **B** определяет в P_k *класс Слупецкого.*

Теорема Розенберга. *При любом $k \geq 2$ предполные в P_k классы и только они определяются предикатами семейств* **P, O, L, E, C, B**.

Отметим, что все предполные в P_2 классы были найдены Э.Постом в 1921 г., а все предполные в P_3 классы — С.В.Яблонским в 1953 г.

§ 3. Однородные функции

В исследованиях по функциям многозначной логики важную роль играют так называемые однородные функции. Для любой перестановки π на множестве E_k обозначим через S_π множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π. Иными словами, S_π — это класс $\mathrm{Pol}(\pi(x_1) = x_2)$. Положим

$$H_k = \bigcap S_\pi,$$

где пересечение берётся по всем перестановкам π на множестве E_k. Функции из класса H_k носят название *однородных функций*. Обозначим через H_k^* множество всех функций из H_k, сохраняющих множество E_{k-1}.

Нетрудно видеть, что H_k и H_k^* являются замкнутыми классами, а в класс H_k^* входят все селекторные функции.

Определим ещё две однородные функции. При любом $k \geq 2$ пусть

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция p называется *тернарным дискриминатором*, она принадлежит классу H_k^*. В случае $k = 2$ функция $p(x, y, z)$ совпадает с булевой функцией $x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z$.

Функция $r_k(x_1, \ldots, x_{k-1})$ задаётся соотношениями

$$r_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция $r_1(x_1)$ совпадает с булевой функцией $\bar{x}_1$, а функция $r_2(x_1, x_2)$ — с функцией $2x_1 + 2x_2$, где сложение и умножение рассматриваются по модулю 3.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 8. *При любом $k \geq 2$ функция p образует базис класса H_k^*.*

Теорема 9. *При любом $k \geq 2$ система функций $\{p, r_k\}$ образует базис класса H_k.*

Литература

1. Гаврилов Г.П. Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 3–26.

2. Гаврилов Г.П. Функциональные системы дискретной математики. М.: Издательство Московского университета, 1985. 39 с.

3. Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 85–106.

4. Марченков С.С. К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 88–99.

5. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.

6. Марченков С.С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: Физматлит, 2004. 103 с.

7. Марченков С.С. Конечная порождаемость замкнутых классов булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2005. Т. 12, № 1. С. 101–118.

8. Перязев Н.А., Казимиров А.С. Замкнутые множества булевых функций. Иркутск: Восточно-Сибирская государственная академия образования, 2010. 52 с.

9. Угольников А.Б. О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 79–88.

10. Угольников А.Б. Классы Поста. М.: Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. 62 с.

11. Фрейвалд Р.В. Функциональная полнота для не всюду определённых функций алгебры логики // Дискретный анализ. 1966. Вып. 8. С. 55–68

12. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.

13. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. 119 с.

14. Post E.L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941. V. 5. 122 p.

15. Rosenberg I.G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Věd. Řada Math. Přir. Věd. Praha, 1970. Bd. 80. S. 3–93.